Spezielle Relativitätstheorie

v. A. Reichert

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Einstein veröffentlichte im Jahre 1905 in den Annalen der Physik seine berühmten Abhandlungen über den Photoeffekt, die Brownsche Molekularbewegung und zur Elektrodynamik bewegter Körper. Letztere wurde später unter dem Titel Relativitätstheorie weltberühmt, für die erste erhielt er 1922 den Nobelpreis. Die Relativitätstheorie war lange Zeit sehr umstritten, erst Mitte des letzten Jahrhunderts fand sie allgemein Anerkennung. Zu abstrus klangen einige ihrer Vorhersagen. Alleine die Bezeichnung Relativitätstheorie ist irreführend. Nach ihr ist keineswegs alles relativ. Relativ sind Größen wie die Masse, die Länge oder die Zeit, da ihr Wert von der Geschwindigkeit abhängt. Nichtrelativ sind alle Invarianten, also Größen, deren Wert in allen Bezugssystemen gleich ist wie der Druck, die Vakuumlichtgeschwindigkeit oder die Wirkung.[1)]

Wie zuerst Maxwell bemerkt hat, muss sich die Zeit ändern, die ein Lichtstrahl braucht, um zwischen zwei Punkten A und B hin und her zu laufen, sobald diese Punkte, ohne den Äther mit sich fortzuführen, gemeinschaftlich verschoben werden. Die Änderung der Zeit ist zwar sehr klein, aber dennoch groß genug, um sie mittels einer empfindlichen Interferenzmethode nachweisen zu können.[2)] Michelson führte den Versuch als erster im Jahre 1881 durch. Er fand keine Spur einer Änderung der Fortpflanzungszeiten. Sein berühmtes Instrument, das Michelson Interferometer, zählt auch heute noch zu den Standardversuchen in der Schulphysik. Lorentz erklärte das negative Ergebnis des Versuches durch die Annahme, dass sich die Weglänge zwischen den beiden Punkten A und B aufgrund der Bewegung verkürzt bzw. verlängert habe, je nachdem, ob sich die Strecke zwischen A und B mit oder entgegen der Drehung der Erde bewegt. Diese Änderungen sollten durch eine Verschiebung der Moleküle durch den Äther verursacht werden. Einstein löste das Problem auf eine andere Art und Weise. Er stellte zwei Postulate auf, die seiner Meinung nach auf Erfahrung beruhen, mit deren Hilfe er die Beobachtungen erklären konnte. Das erste Postulat, auch Relativitätsprinzip genannt, besagt, dass alle Inertialsysteme zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt sind. Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form. Nach dem zweiten breitet sich Licht im Vakuum in allen Inertialsystemen gleichförmig in alle Richtungen aus, unabhängig von der momentanen Bewegung der Lichtquelle. Wegen dieser Invarianz der Vakuumlichtgeschwindigkeit musste Michelson messen, was er gemessen hat, nichts. Es bleibt als Ergebnis seines Versuches die Tatsache, dass es keinen Äther gibt. Ansonsten ist er für die Relativitätstheorie nicht besonders relevant. Mit den beiden Postulaten konnte Einstein eine Reihe auf den ersten Blick seltsam anmutender Phänomene vorhersagen. In einem bewegten System gehen Uhren langsamer und Längen werden verkürzt. Heute spricht man von Zeitdilatation und Längenkontraktion. Außerdem nimmt die Masse eines Körpers mit seiner Geschwindigkeit zu. Daher können materielle Körper niemals auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. Ferner sind Masse und Energie äquivalent. Sie lassen sich in einander umwandeln. Und die Gesamtgeschwindigkeit aus zwei gleich gerichteten Geschwindigkeiten darf nur dann durch einfache Addition ermittelt werden, solange beide sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind. Ansonsten muss man Einsteins Additionstheorem für Geschwindigkeiten anwenden. Alle vorhergesagten Erscheinungen wurden im Laufe der letzten hundert Jahre in mehreren unterschiedlichen Versuchen bestätigt. In letzter Zeit mehren sich jedoch Anzeichen und Versuchsergebnisse, die auf Überlichtgeschwindigkeit einzelner Photonen hindeuten. Ihre Geschwindigkeit unterläge damit statistischen Schwankungen wie bei Elektronen. Dem zweiten Einsteinschen Postulat wäre die Erfahrungsgrundlage entzogen. Damit stellt sich die Frage: Gibt es eine schlüssige alternative Erklärung außerhalb der Relativitätstheorie zum negativen Ausgang des Michelson-Versuchs und der anderen Erscheinungen wie Längenkontraktion, Zeitdilatation usw. Meiner Meinung nach ja, wie ich am Ende der Ausführungen zeigen werde. Sie weist in die gleiche Richtung wie die Deutungen der Quantenmechanik im Skript „Den Quanten auf der Spur“ auf dieser Webseite. In gewisser Weise orientiert sie sich an den Überlegungen Lorentz, kommt jedoch ohne Äther, also ein Trägermedium für elektromagnetische Wellen aus. Den gibt es aufgrund der Ergebnisse des Michelson-Versuchs definitiv nicht. Auch das Relativitätsprinzip wird nicht verletzt. Doch zuvor sollen die wichtigsten Aussagen der Relativitätstheorie ausführlich dargestellt werden, in einer Form, die ich seit dreißig Jahren in zahlreichen Leitungskursen erprobt habe. Dabei muss man nicht jede mathematische Herleitung bis in alle Einzelheiten im Unterricht umsetzen. Viel wichtiger ist es, dass die Schülerinnen und Schüler die wesentlichen Aussagen der mathematischen Gesetzmäßigkeiten anschaulich verstanden haben. Es bringt nichts, sich hinter den mathematischen Formalismen zu verstecken, aber der wesentliche Gehalt rauscht an den Schülerinnen und Schülern vorbei, wobei es ohne die Formalismen sicherlich auch nicht geht. Ich wünsche Ihnen viel Spaß beim Lesen des Skriptes.

Stolberg, Juli 2014

2. Grundaussagen

Aus dem Relativitätsprinzip und der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit konnte Einstein eine Reihe von Erscheinungen vorhersagen, die sich im Laufe der folgenden Jahrzehnte durch zahlreiche Experimente als richtig erwiesen haben. Die wichtigsten sind:

- Längenkontraktion
- Zeitdilatation
- Additionstheorem
- Massenzunahme
- Äquivalenz Masse-Energie
- Beziehung Energie-Impuls
- relativistischer Impuls
- relativistische Kraft.

Sie werden in den folgenden Kapiteln im Einzelnen hergeleitet. Die wesentlichen Aussagen werden in diesem Kapitel kurz zusammengestellt.

Besitzt ein Stab in seinem eigenen Ruhesystem die Länge l_0, so gilt für seine Länge l in einem Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum Stab bewegt:

$$l = l_0 * \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Der Stab erscheint dem bewegten Beobachter verkürzt, da der Faktor unter der Wurzel stets kleiner als 1 ist. Für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, geht der Faktor unter der Wurzel gegen 1 und in beiden Bezugssystemen erscheint der Stab mit der gleichen Länge l_0.

Vergeht im Ruhesystem einer Uhr die Zeit t_0, so zeigt eine Uhr in einem System, zu dem sich die Uhr mit der Geschwindigkeit v bewegt, eine Zeit t an, für die gilt:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Die Zeit hat sich verlängert, da der Faktor unter der Wurzel stets kleiner als 1 ist und außerdem im Nenner steht. Für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, strebt der Faktor unter der Wurzel gegen 1 und die Uhren messen in beiden Bezugssystemen die gleiche Zeit.

Da nach dem zweiten Postulat Geschwindigkeiten größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeiten nicht real sind, kann man Geschwindigkeiten, die in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit liegen, nicht einfach addieren, da sich sonst Überlichtgeschwindigkeiten ergeben würden. Es gilt vielmehr folgende Gesetzmäßigkeit:

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12} * v_{23}}{c^2}}.$$

Darin bedeuten:

v_{12}: Geschwindigkeit des bewegten Beobachters bezüglich des ruhenden Beobachters
v_{23}: Geschwindigkeit eines Körpers bezüglich des bewegten Beobachters
v_{13}: Geschwindigkeit des Körpers bezüglich des ruhenden Beobachters
c: Lichtgeschwindigkeit.

Sind die Geschwindigkeiten v_{12} und v_{23} klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c, so wird der Nenner des Hauptbruches 1 und man erhält die klassische Formel für die Addition der Geschwindigkeiten:

$$v_{13} = v_{12} + v_{23}.$$

Da ein Körper nicht auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann, muss die zugeführte Energie in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit zu einer Massenzunahme führen, denn die kinetische Energie hängt nur von der Masse des Körpers und seiner Geschwindigkeit ab. Besitzt der Körper die Ruhemasse m_0, so gilt für seine Masse m, wenn er sich mit der Geschwindigkeit v bewegt:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Ist die Geschwindigkeit v sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, so ist die Masse m des bewegten Körpers gleich seiner Ruhemasse m_0, da der Faktor unter der Wurzel gegen 1 strebt. Da bei einer Beschleunigung in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit Energie in Masse umgewandelt wird, müssen beide wesensverwandt sein. Das muss sich auch in einer mathematischen Gleichung ausdrücken. Sie ist Einsteins berühmteste Formel und lautet:

$$E = mc^2.$$

Für die kinetische Energie erhält man:

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2.$$

Setzt man die Formel für die relativistische Masse ein, so ergibt sich:

$$E_{kin} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right).$$

Aus der Massenzunahme mit der Geschwindigkeit ergibt sich eine wichtige Beziehung zwischen Energie und Impuls, die in der Elementarteilchenphysik vielfach angewendet wird. Sie lautet:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0{}^2c^4.$$

Die Newtonschen Definitionen für den Impuls und die Kraft bleiben erhalten. Allerdings muss man die Änderung der Masse mit der Geschwindigkeit beachten. Es gilt:

$$p = m * v = \frac{m_0 * v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

und

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 * v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

3. Lorentztransformationen

Die zwei Einsteinschen Postulate, das Relativitätsprinzip und die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit fasst man auch unter dem Begriff Lorentzinvarianz zusammen. Mit ihr kann man die Lorentztransformationen herleiten, mit denen man die Orts- und Zeitkoordinaten von einem ruhenden System in ein dazu mit gleichmäßiger Geschwindigkeit v bewegtes System umrechnen, transformieren kann. Sendet eine punktförmige Lichtquelle im ruhenden bzw. bewegten System ein Lichtsignal aus, so breitet es sich kugelförmig um die Quelle aus. Nach der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit gilt für die Radien r und r‘ der Kugeln in Abhängigkeit von den Zeiten t und t‘:

$$r^2 - (c*t)^2 = 0$$

und

$$r'^2 - (c*t')^2 = 0.$$

Ersetzt man den Radius jeweils durch kartesische Koordinaten und setzt beide gleich, so folgt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (c*t)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (c*t')^2.$$

Diese Gleichung kann nur für beliebige Relativgeschwindigkeiten v der beiden Systeme gelten, wenn man die entsprechenden Ortskoordinaten und die beiden Zeitkoordinaten zu jedem Zeitpunkt ineinander umrechnen kann. Dabei sollen sich die beiden Bezugssysteme der Einfachheit halber nur in x-Richtung gegeneinander bewegen. Man wählt folgende Ansätze:

$$x' = k*(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a*(t - b*x).$$

Setzt man sie in die obige Gleichung ein, so folgt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (c*t)^2 =$$

$$(k^2 - b^2a^2c^2)x^2 - 2(k^2v - ba^2c^2)xt + y^2 + z^2 - (a^2 - k^2v^2/c^2)(c*t)^2.$$

Damit diese Gleichung zu jedem Zeitpunkt erfüllt ist, müssen folgende drei Bedingungen gelten:

$$k^2 - b^2 a^2 c^2 = 1$$

$$k^2 v - b a^2 c^2 = 0$$

$$a^2 - k^2 v^2 / c^2 = 1.$$

Aus diesen drei Gleichungen mit drei Unbekannten erhält man nach einiger Rechnung:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$b = \frac{v}{c^2}.$$

Damit lauten die Lorentztransformationen, mit denen man die Koordinaten im Ruhesystem ins bewegte System transformieren kann:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Für die Umkehrtransformationen erhält man analog:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + vx' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

4. Zeitdilatation

Im Ruhesystem einer Uhr vergeht die Zeit

$$t_0 = t_2 - t_1.$$

Bewegt sich die Uhr relativ zu einem zweiten System mit der Geschwindigkeit v, so verstreicht in diesem System die Zeit

$$t = t_2^{'} - t_1^{'}.$$

Mit Hilfe der Lorentztransformationen kann man die Zeit vom bewegten System ins Ruhesystem der Uhr transformieren. Es gilt:

$$t = t_2^{'} - t_1^{'}$$

$$= \frac{(t_2 - \frac{v}{c^2}x) - (t_1 - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Daraus folgt für t_0

$$t_0 = t * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Relativ zu einem Bezugssystem bewegte Uhren gehen langsamer als Uhren, die in diesem Bezugssystem ruhen. Betrachtet ein Beobachter die Uhr in seinem eigenen Ruhesystem, so verläuft die Zeit langsamer, von einem dazu relativ bewegten System aus gesehen dagegen schneller. Im Ruhesystem der Uhr ist die Zeit gedehnt. Man spricht von Zeitdilatation. Fliegt ein Astronaut längere Zeit mit großer Geschwindigkeit durchs Weltall und nimmt dabei eine Uhr mit, so läuft diese Uhr langsamer als Uhren, die auf der Erde zurückbleiben, da sich die Erde relativ zum Raumschiff bewegt. Der Astronaut altert weniger als seine Mitmenschen auf der Erde. Man spricht vom Zwillingsparadoxon, weil zwei vor der Reise gleichaltrige Zwillinge nach der Reise nicht mehr gleich alt sind.

Die grundsätzlichen Überlegungen kann man auch mit einer Lichtuhr verdeutlichen[4)]. In ihr dient ein Lichtsignal als Taktgeber, das ständig zwischen zwei Spiegeln hin- und her reflektiert wird. Ruht die Uhr, so läuft das Lichtsignal ständig die Länge der Uhr auf und ab (s. Abb.1).

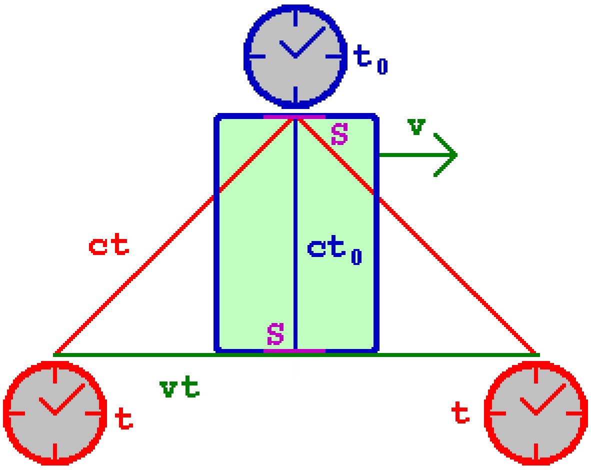

Abb.1: Zeitdilatation

Jedes Mal, wenn das Lichtsignal an einem der beiden Spiegel S ankommt, springt die Anzeige eines Zählers um eine Einheit weiter. Bewegt sie sich, so muss das Licht von einem zweiten Bezugssystem aus betrachtet von einem Spiegel zum nächsten einen längeren Weg zurücklegen, da der Lichtstrahl schräg verlaufen muss. Dafür benötigt er wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mehr Zeit. Es vergehen mehr Zeiteinheiten. Allgemein gilt, wie man aus Abb.1 ablesen kann:

$$c^2 t_0{}^2 + v^2 t^2 = c^2 t^2$$

und damit:

$$c^2 t_0{}^2 = c^2 t^2 - v^2 t^2$$

$$t_0{}^2 = t^2 - v^2 / c^2 * t^2$$

$$t_0{}^2 = t^2 (1 - v^2 / c^2)$$

$$t_0 = t * \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Die Zeitdilatation haben C. Hafele und R. Keating 1971 in einem aufwändigen Versuch überprüft. Sie umkreisten mit Linienmaschinen mehrfach die Erde mit Atomuhren im Handgepäck, die auf 1 ps genau gingen. Sie flogen an vielen synchronisierten Atomuhren auf der Erde vorbei. Da ihre Fluggeschwindigkeit im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sehr klein war, mussten sie lange fliegen, um einen messbaren Unterschied der Atomuhren auf der Erde und im Flugzeug zu erhalten. Sie errechneten mit der speziellen Relativitätstheorie eine Zeitdilatation von Δt_1

= 250 ns. Da sie in rund 10000 km Höhe kreisten, gingen die Atomuhren aufgrund der geringeren Gravitation nach der allgemeinen Relativitätstheorie um Δt_2= 200 ns schneller als auf der Erde. Es blieb eine Nettozeitdilatation von Δt = 50 ns übrig. Genau diese Zeitdifferenz haben sie gemessen.

Folgendes Rechenbeispiel macht deutlich, wie klein der Effekt der Zeitdilatation für den Flug ist. Man erhält für die Zeitdilatation mit den oben abgeleiteten Formeln:

$$\Delta t = t - t_0$$

$$= \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - t_0$$

$$= t_0 * (\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1).$$

Da v sehr viel kleiner als c ist, reicht die Genauigkeit eines Taschenrechners nicht aus, um mit dieser Formel einen vernünftigen Wert für Δt zu erhalten. Man muss die Gleichung in eine Taylorreihe entwickeln. Die ersten beiden Glieder lauten für eine beliebige Funktion f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} * x + \ldots$$

Wendet man sie auf die Wurzelfunktion in obiger Formel an und setzt darin

$$x = v^2 / c^2$$

so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} * (-1)$$

$$= 1/2$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} * x.$$

Damit ergibt sich für die Zeitdilatation für einen Flug mit v = 1000km/h und einer Flugzeit t_0 = 160h folgender Näherungs-wert:

$$\Delta t = t_0 * (1 + \frac{1}{2} * \frac{v^2}{c^2} - 1)$$
$$= \frac{1}{2} t_0 * \frac{v^2}{c^2}$$
$$= \frac{1}{2} * 5{,}76 * 10^5 s * \frac{(2{,}78 * 10^2 m/s)^2}{(3 * 10^8 m/s)^2}$$
$$= 247 ns.$$

5. Längenkontraktion

Eine der wesentlichen Folgerungen aus den Lorentztransformationen ist die Längenkontraktion. Ein Stab hat in seinem eigenen Ruhesystem die Länge

$$s_0 = x_2 - x_1.$$

Bewegt sich ein zweites System relativ zum Ruhesystem mit der Geschwindigkeit v in Längsrichtung des Stabes, so besitzt er in diesem zweiten Bezugssystem die Länge

$$s = x_2^{'} - x_1^{'}.$$

Mit Hilfe der Lorentztransformationen kann man die Länge vom ruhenden ins bewegte System transformieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} s_0 &= x_2 - x_1 \\ &= \frac{(x_2^{'} + vt) - (x_1^{'} + vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{x_2^{'} - x_1^{'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{s}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für s

$$s = s_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Misst ein Beobachter die Länge s_0 des Stabes in dessen Ruhesystem, so erhält er einen größeren Wert als ein Beobachter, der die Messung vom bewegten Bezugssystem aus durchführt. Die Länge s des Stabes erscheint vom bewegten System aus betrachtet verkürzt. Man spricht von Längenkontraktion.

Die Längenkontraktion lässt sich auch mit Hilfe der Formel für die Zeitdilatation ableiten[4)]. Betrachten Sie dazu Abb.1. Im ruhenden System werden zwei synchronisierte Uhren U_1 und U_2 aufgestellt im Abstand s. An den Uhren fliegt eine Rakete mit der Geschwindigkeit v vorbei. Sie hat eine eigene Uhr U an Bord. Die Astronauten starten ihre Uhr, wenn sie U_1 überfliegen, ein Erdbewohner die Uhr U_1, wenn die Rakete über ihn hinwegsaust. Beide stoppen ihre Uhren, wenn die Rakete die zweite Uhr U_2 passiert. Die Astronauten erhalten als Flugzeit die Zeit

t_0, die Erdbewohner die Zeit t. Die Astronauten errechnen damit die Entfernung der beiden Uhren zu

$$\begin{aligned} s &= v * t_0 \\ &= v * t * \sqrt{1 - v^2 / c^2} \\ &= s_0 * \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \end{aligned}$$

Dabei muss man beachten, dass bei Zeitmessungen die Zeit auf der bewegten Uhr als Eigenzeit t_0 definiert ist, bei Längenmessungen dagegen die Länge des ruhenden Stab als Eigenlänge s_0. Es gilt folglich für die Länge s des Stabes im bewegten System bzw. s_0 im ruhenden System:

$$s = v * t_0$$

$$s_0 = v * t.$$

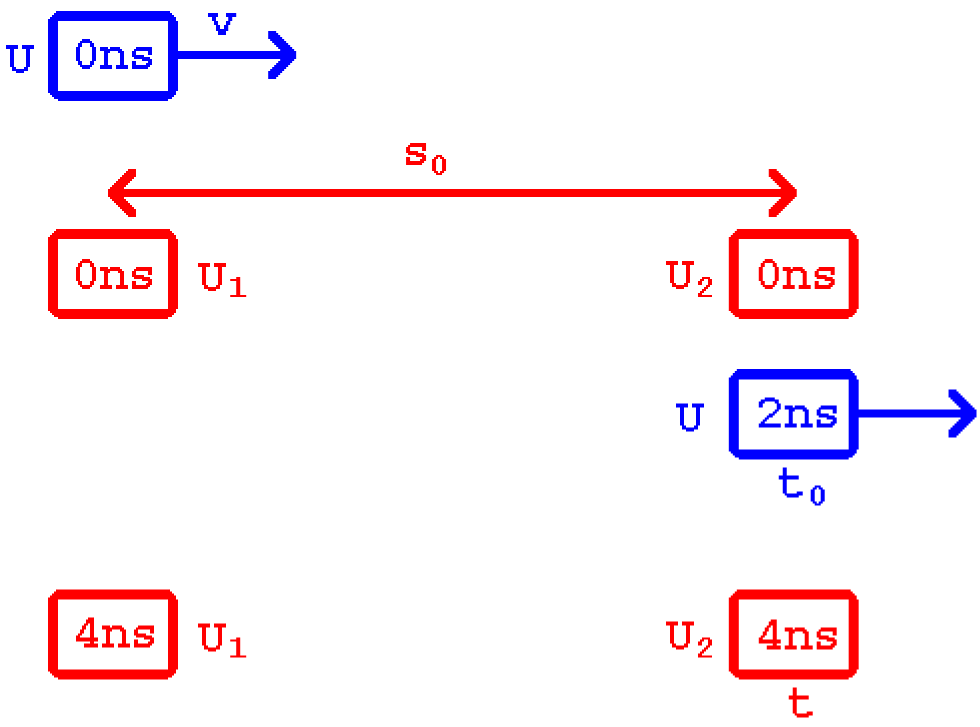

Abb.1: Längenkontraktion

Die Längenkontraktion wurde mit Hilfe von Myonen bestätigt. Sie entstehen in einer Höhe s_0 = 15km über der Erde und erreichen nahezu Lichtgeschwindigkeit. Ihre Halbwertszeit in ihrem eigenen Ruhesystem beträgt $T_{1/2}$ = 1,5µs. Etwa 4% der gebildeten Myonen fliegen bis zur Erdoberfläche, bevor sie zerfallen. Nach dem Zerfallsgesetz müssen sie eine Lebensdauer t haben, für die gilt:

$$t = -\frac{\ln 0{,}04}{\ln 2} * T_{1/2}$$

$$= 6{,}97 \mu s.$$

Damit könnten sie mit Lichtgeschwindigkeit maximal die Strecke

$$s = c * t$$

$$= 3 * 10^8 m/s * 6{,}97 * 10^{-6} s$$

$$= 2{,}091 km$$

zurücklegen, bevor sie zerfallen sind. Die Strecke s_0 erscheint für sie aber aufgrund der hohen Geschwindigkeit v verkürzt. Aus der oben hergeleiteten Formel für die Längenkontraktion folgt für v:

$$v = c * \sqrt{1 - (s/s_0)^2}$$

$$= c * \sqrt{1 - (2{,}091 km / 15 km)^2}$$

$$= 0{,}928c.$$

6. Additionstheorem

Im bewegten System habe ein Körper die Geschwindigkeit v_{23}, das System selbst bewege sich mit der Geschwindigkeit v_{12} bezüglich des Ruhesystems. Nach klassischer Rechnung hat der Körper dann bezogen auf das Ruhesystem die Geschwindigkeit v_{13}, für die gilt:

$$v_{13} = v_{12} + v_{23}.$$

Diese Formel kann man in der Relativitätstheorie nur anwenden, wenn die Geschwindigkeiten sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sind. In der Nähe der Lichtgeschwindigkeit ergeben sich sonst Überlichtgeschwindigkeiten, die nach den Einsteinschen Postulaten nicht vorkommen. Daher musste Einstein eine neue Formel herleiten, mit der man beliebige Geschwindigkeiten addieren kann, ohne dass sich Geschwindigkeiten größer als c ergeben. Die Ableitung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
v_{13} &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{x_2' + v_{12}t_2' - (x_1' + v_{12}t_1')}{t_2' + \frac{v_{12}}{c^2}x_2' - (t_1' + \frac{v_{12}}{c^2}x_1')} \\
&= \frac{v_{12}(t_2' - t_1') + x_2' - x_1'}{t_2' - t_1' + \frac{v_{12}}{c^2}(x_2' - x_1')} \\
&= \frac{v_{12} + \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'}}{1 + \frac{v_{12}}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \\
&= \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12}v_{23}}{c^2}}.
\end{aligned}$$

Sind v_{12} und v_{23} klein gegen c, so geht der Nenner gegen 1 und man erhält die oben angegebene klassische Formel.

7. Masse und Energie

Zum Thema Äquivalenz Masse und Energie findet man zahlreiche Ableitungen in den Lehrbüchern. Die folgende orientiert sich an der Originalabhandlung Einsteins[2)]. Einstein nimmt an, dass ein Elektron in seinem Ruhesystem durch eine elektrische Kraft F_0 in Richtung der x-Achse beschleunigt wird. Unterteilt man die Bewegung in kleine Wegabschnitte s_0 und Zeitabschnitte t_0, so kann man die Beschleunigung a_0 innerhalb eines solchen Teilelementes als konstant ansehen. Man digitalisiert gewissermaßen die Bewegung des Elektrons. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom gilt für das Elektron mit der Ruhemasse m_0:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= m_0 * a_0 \\
&= m_0 * \frac{2s_0}{(t_0)^2}.
\end{aligned}
$$

Transformiert man s_0 und t_0 mit den Formeln für die Längenkontraktion und Zeitdilation

$$s_0 = \frac{s}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$t_0 = t * \sqrt{1-v^2/c^2}$$

ins bewegte System, so erhält man dort für die Kraft F

$$
\begin{aligned}
F &= m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}^3} * \frac{2s}{t^2} \\
&= m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}^3} * a.
\end{aligned}
$$

In der Originalabhandlung Einsteins wird das Elektron zusätzlich zum elektrischen Feld noch durch ein senkrecht dazu stehendes magnetisches Feld beschleunigt. Die Ableitung wird dadurch komplizierter, da auch Kräfte in y-und z-Richtung auftreten und transformiert werden müssen wegen der Zeitdilatation. Er erhält so zwei verschiedene Massen, eine longitudinale und eine transversale, je nachdem, ob die Kraft eine Geschwindigkeits- oder eine Richtungsänderung bewirkt. Beide Massen sind anders als in der Newtonschen Mechanik nicht gleich. Für die kinetische Energie E_{kin} im bewegten System gilt mit der klassischen Formel für die Beschleunigungsarbeit als Wegintegral über die Kraft:

$$
\begin{aligned}
E_{kin} &= \int_0^v F ds \\
&= \int_0^v \; m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}^3} * a * ds \\
&= \int_0^v m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}^3} * \frac{dv}{dt} * ds \\
&= \int_0^v m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}^3} * v * dv \\
&= m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Big|_0^v \\
&= m_0 c^2 * (\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1) \\
&= mc^2 - m_0 c^2 .
\end{aligned}
$$

Nach diesem Ergebnis besitzen auch Körper, die in Ruhe sind, eine Energie, die Ruheenergie. Sie ist umso größer, je größer ihre Masse ist. Die berühmte Einsteinsche Formel für den Zusammenhang zwischen Energie und Masse ist allgemeingültig. Sie lautet:

$$E = mc^2 .$$

Ganz so verwunderlich, wie es häufig dargestellt wird, ist diese Erkenntnis nicht. Auch nach der klassischen Formel wird die kinetische Energie größer, wenn die Masse zunimmt. Nach Einstein gilt diese Aussage jedoch nicht nur für die kinetische Energie, sondern für jede Form der Energie. Im Folgenden wird gezeigt, dass für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, die allgemein gültige Einsteinsche Formel in die klassische Formel für die kinetische Energie übergeht. Dazu entwickelt man sie in eine Taylorreihe. Die ersten beiden Glieder lauten für eine beliebige Funktion f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} * x + \ldots$$

Wendet man sie auf die Wurzelfunktion in der Einstein-Formel für die kinetische Energie an und setzt darin

$$x = v^2 / c^2$$

so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} * (-1)$$

$$= 1/2$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} * x.$$

Überträgt man diese mathematischen Überlegungen auf die Einsteinsche Energieformel, so folgt für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = m_0 c^2 (1 + \frac{1 * v^2}{2 * c^2}) - m_0 c^2$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Sie entspricht der kinetischen Energie eines Körpers der Masse m_0 und der Geschwindigkeit v nach klassischer Rechnung.

8. Massenzunahme

Aus der Ableitung in Kapitel 7 geht hervor, dass die Masse mit der Geschwindigkeit v zunimmt nach folgendem Gesetz:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Diese wichtige Erkenntnis soll auf eine andere Art und Weise noch mal verdeutlicht werden. Das radioaktive Präparat Na-22 liefert schnelle Positronen. In Materie werden sie praktisch ganz abgebremst. Zur Ruhe gekommen, reagiert jedes Positron mit einem Elektron. Dabei verschwinden beide und zerstrahlen innerhalb einer kurzen Zeitspanne t_0 in zwei Photonen, die mit Lichtgeschwindigkeit c auseinanderfliegen. Von einem bewegten Bezugssystem aus betrachtet, beobachtet man das Gleiche. Die Wirkung W des Zusammentreffens eines Elektrons mit einem Positron ist in beiden Bezugssystemen gleich. Im bewegten System dauert der Vorgang des Zerstrahlens wegen der Zeitdilatation eine kürzere Zeitspanne t. Es gilt mit W als Wirkung, m als Masse und E als Energie des Positrons bzw. Elektrons im betreffenden Bezugssystem:

$$\begin{aligned} W &= W_0 \\ E * t &= E_0 * t_0 \\ 2mc^2 * t &= 2m_0c^2 * t_0 \\ mc^2 * t &= m_0c^2 * t_0. \end{aligned}$$

Mit

$$t = t_0 * \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

folgt

$$mc^2 * t_0 * \sqrt{1 - v^2 / c^2} = m_0c^2 * t_0$$

und daraus

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Die Masse nimmt mit der Geschwindigkeit zu. Die Wirkung ist Lorentz invariant. Sie ist in allen Bezugssystemen gleich, wie schon in der Einleitung erläutert.

Alternativ kann man die Massenzunahme auch anhand eines Stoßexperimentes erklären. Eine Kugel bewege sich in ihrem Eigensystem S_0 entlang der y-Achse mit der Geschwindigkeit v_{y0}. Sie stößt unelastisch auf ein Hindernis und hinterlässt in ihm eine Wirkung mit der Eindringtiefe h_0 (s. Abb.1).

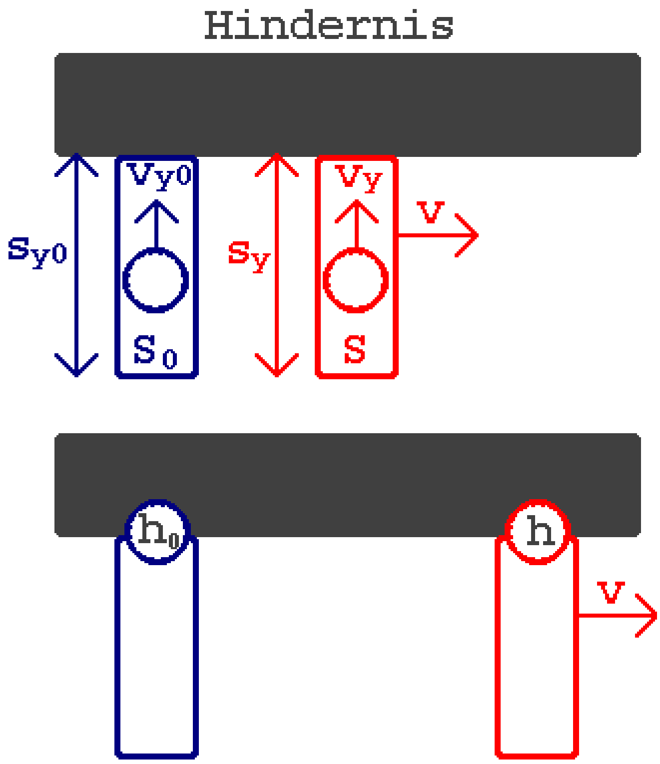

Abb.1: Unelastischer Stoß einer Kugel

Von einem in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegten System S aus betrachtet, muss sie im Hindernis die gleiche Wirkung verursachen, da die Wirkung Lorentz invariant ist. Es gilt:

$$W = W_0$$

$$\Delta p_y * h = \Delta p_{y0} * h_0.$$

Da Längen in y-Richtung nicht kontrahiert sind, muss von beiden Systemen aus betrachtet die Delle gleich tief sein. Somit ist h gleich h_0. Damit folgt:

$$\Delta p_y = \Delta p_{y0}$$

$$m * v_y = m_0 * v_{y0}.$$

Für die Geschwindigkeit gilt im Eigensystem der Masse:

$$v_{y0} = \frac{s_{y0}}{t_0}$$

und im dazu bewegten System:

$$v_y = \frac{s_y}{t}.$$

Da Längen in y-Richtung nicht kontrahiert sind, ist s_y gleich s_{y0}. Allerdings muss man die Zeitdilatation beachten. Damit folgt:

$$v_y = \frac{s_{y0}}{t_0} * \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Setzt man diese Ergebnisse in Gleichung 1 ein, so erhält man:

$$m * \frac{s_{y0}}{t_0} * \sqrt{1 - v^2 / c^2} = m_0 * \frac{s_{y0}}{t_0}$$

und damit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Die Zunahme der Masse mit der Geschwindigkeit wurde von zahlreichen Forschern an schnellen Elektronen aus der β-Strahlung und in Teilchenbeschleunigern überprüft, u.a. von Guye und Lavanchy, Kaufmann, Neumann und Schäfer und zuletzt Bertozzi. In Abb.2 werden die Ergebnisse einiger dieser Versuche mit der theoretischen Kurve (rot) vergleichen[3)]. Man sieht, dass die theoretischen und gemessenen Werte in allen Geschwindigkeitsbereichen sehr gut übereinstimmen. Die relativistische Massenzunahme war die erste Gesetzmäßigkeit der speziellen Relativitätstheorie, die experimentell durch Bucherer bereits 1909 bestätigt wurde, vier Jahre nach Einsteins Veröffentlichungen in den Annalen der Physik. Sie begründete Einsteins legendären Ruf als Physiker.

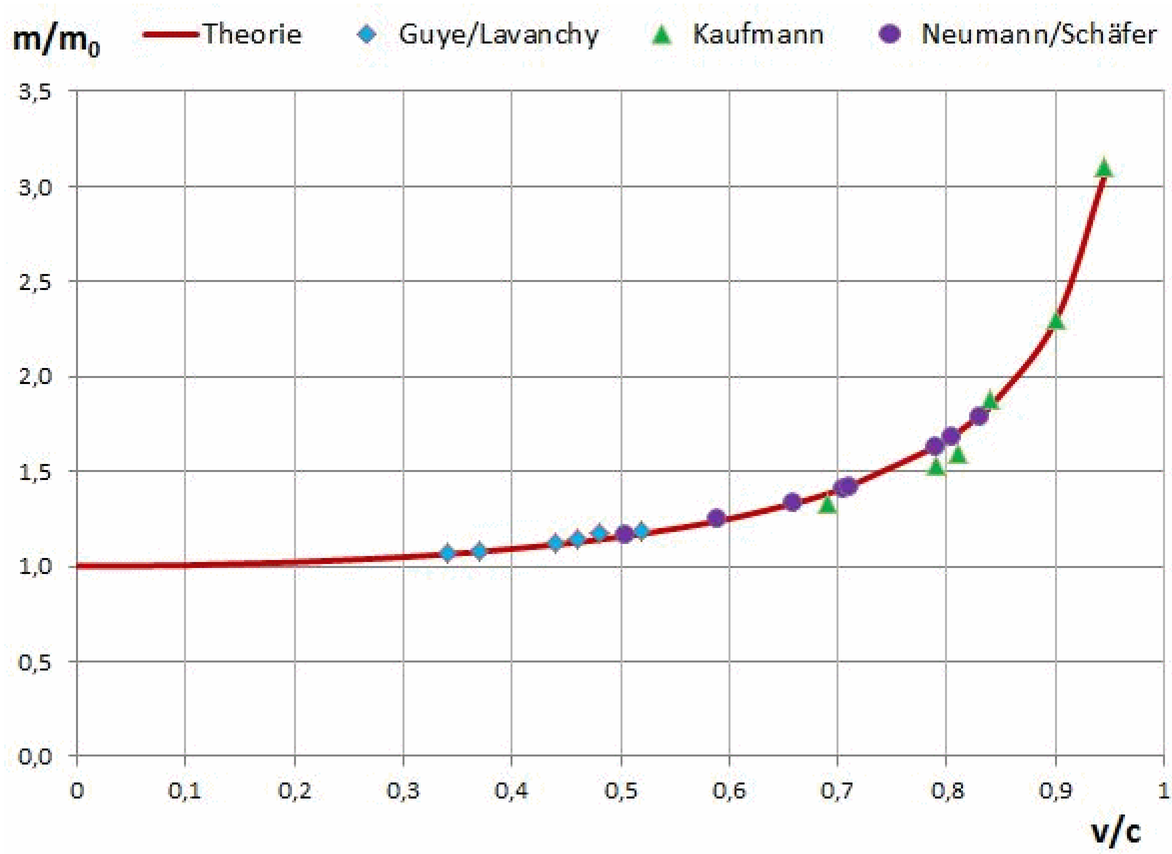

Abb.2: relativistische Massenzunahme mit der Geschwindigkeit

9. Energie und Impuls

Quadriert man die Gleichung für die Massenzunahme aus dem vorigen Kapitel und stellt sie anschließend etwas um, so erhält man:

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0{}^2c^2.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit c^2, so ergibt sich:

$$m^2c^4 = m^2v^2c^2 + m_0{}^2c^4.$$

Mit

$$E = mc^2$$

$$p = m * v$$

folgt:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0{}^2c^4.$$

Diese Gleichung wird sehr oft in der Elementarteilchenphysik eingesetzt, um den Impuls zu berechnen.

10. Kraft und Impuls

Für den relativistischen Impuls gilt:

$$p = m * v$$

$$= \frac{m_0 * v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Für die Kraft gilt:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 * v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)$$

$$= \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - \frac{1}{2} \frac{m_0 v \frac{(-2v)}{c^2} * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}^3}$$

$$= \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{m_0 \frac{v^2}{c^2} * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}^3}$$

$$= \frac{m_0 * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}^3} \left(\sqrt{1 - v^2 / c^2}^2 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{m_0 * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{m_0 * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}^3}$$

$$= \frac{m_0 * a}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}^3}.$$

Diese Formel stimmt mit der Formel aus dem Kapitel Masse und Energie überein, die Einstein bei der Transformation der Kraft aus dem Ruhesystem ins bewegte System erhalten hat.

11. Zeit und Gravitation

Eine Uhr U der Masse m_0 umkreist die Erde in einer Höhe h_2 mit der Geschwindigkeit v_2 (s. Abb.1).

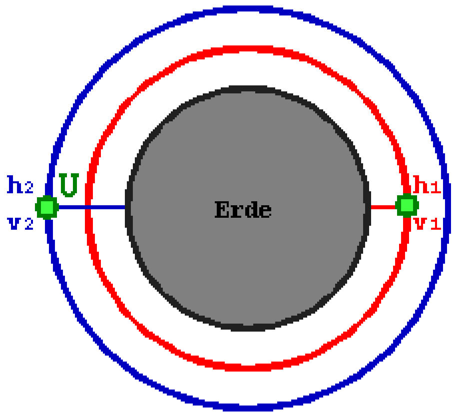

Abb.1: Zeit und Gravitation

Sie fällt auf eine Höhe h_1. Ihre potentielle Energie nimmt ab, ihre kinetische zu. Da die Geschwindigkeit auf v_1 steigt, geht die Uhr aufgrund der Zeitdilatation immer langsamer, je näher sie der Erde kommt. Mit dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2}$$

$$m_1c^2 - m_0c^2 + m_0gh_1 = m_2c^2 - m_0c^2 + m_0gh_2$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + m_0gh_1 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} + m_0gh_2$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + gh_1 = \frac{c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} + gh_2$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} - \frac{c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} = gh_2 - gh_1.$$

Darin wurden die Formeln für die Massenzunahme und die relativistische kinetische Energie benutzt, die in den Kapiteln „Masse und Energie“ und „Massenzunahme“ hergeleitet wurden.

Wendet man auf die Uhr in beiden Zuständen die Formel für die Zeitdilatation an, so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}=\frac{t_0}{t_1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}=\frac{t_0}{t_2}.$$

Darin ist t_0 die Zeit im Ruhesystem der Uhr. Setzt man diese beiden Formeln in die obige Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{c^2t_0}{t_1}-\frac{c^2t_0}{t_2}=gh_2-gh_1$$

$$c^2t_0*\frac{(t_2-t_1)}{t_1*t_2}=g(h_2-h_1).$$

Ist v sehr viel kleiner als c, so gilt:

$$t_0\approx t_1\approx t_2.$$

Setzt man außerdem

$$\Delta t=t_2-t_1$$
$$\Delta h=h_2-h_1,$$

so folgt:

$$\frac{c^2\Delta t}{t_0}=g*\Delta h$$

und damit

$$\Delta t=\frac{g*\Delta h*t_0}{c^2}.$$

Die Zeit nimmt proportional mit der Höhe über dem Erdboden zu. 1973 bestätigten Forscher der Universität Maryland (USA) die Überlegungen. Ein Flugzeug mit Atomuhren an Bord kreiste in drei verschiedenen Höhen um rund 10000m Höhe 15 Stunden lang über einer Uhrengruppe am Boden. Die Uhren am Boden zeigten danach eine um 47,1 ns geringere Zeit an. Der aus den genauen Flugdaten mit obiger Formel berechnete Wert und der gemessene

Wert wichen nur um 1% voneinander ab. Einen Näherungswert erhält man, wenn man die mittleren Flugdaten benutzt. Es ergibt sich:

$$\Delta t = \frac{9{,}81 m/s^2 * 10000 m * 15 * 3600 s}{(3*10^8 m/s)^2}$$
$$= 58{,}9 ns.$$

12. Aufgaben

1) Stellen Sie die besonderen Effekte der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie zusammen. Benutzen Sie dazu das Buch, das in der Schule gezeigte Video und die Videos: „Das Geheimnis der Zeit Einsteins Relativitätstheorie 1-3" auf der Internetseite www.youtube.com. Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie.

2) Diskutieren Sie, welcher Versuch die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie bildet. Sehen Sie sich dazu das Video „Erweitertes Michelson-Morley-Experiment 2009 Deutsche Version" unter www.youtube.com und die Beschreibung im Buch an. Erläutern und erklären Sie den Aufbau, die Durchführung und das Ergebnis des Versuches.

3) Erläutern Sie die Aussagen der Lorentztransformationen. Leiten Sie aus ihnen die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit her.

4) Stellen Sie die Gesetze für folgende Effekte der speziellen Relativitätstheorie auf:
   a) Additionstheorem der Geschwindigkeiten
   b) Massenzunahme
   c) Längenkontraktion
   d) Zeitdilatation
   e) Äquivalenz Masse/Energie
   f) relativistische kinetische Energie.

   Leiten Sie die Formel für die relativistische Addition der Geschwindigkeiten her. Ziehen Sie das Kapitel Additionstheorem zu Rate.

5) Berechnen Sie die Summe der beiden Geschwindigkeiten relativistisch für folgende Fälle:
   a) $v_1 = 2/3c$, $v_2 = c$,
   b) $v_1 = c$, $v_2 = c$ und
   c) $v_1 = 3/4c$, $v_2 = 3/4c$.

6) Ein Elektron bewegt sich so schnell, dass sich seine Masse verdoppelt.
   a) Berechnen Sie seine Geschwindigkeit.
   b) Berechnen Sie die benötigte Beschleunigungsspannung.
   c) Berechnen Sie seine Geschwindigkeit nichtrelativistisch.

7) Ein Objekt der Länge $l = 10m$ bewegt sich $t = 10s$ mit einer Geschwindigkeit $v = 2/3c$. Berechnen Sie für diesen Fall die Längenkontraktion und die Zeitdilatation.

8) Bei der Satellitennavigation mit GPS muss die Zeitabweichung zwischen den Uhren an Bord der Satelliten und den Uhren am Boden unbedingt beachtet werden, weil es sonst zu Ortsabweichungen von mehreren Kilometern kommen kann. Erklären Sie.

9) Ein Langstreckenflug von Frankfurt nach Buenos Aires dauert etwa t = 12 Stunden bei einer mittleren Reisegeschwindigkeit v = 900km/h und einer mittleren Flughöhe h = 10000m. Berechnen Sie, um wieviel eine Person an Bord langsamer oder schneller altert als ein Mensch, der auf dem Boden geblieben ist.

10) In einem Blitz werden Elektronen mit einer Spannung U = 100MV beschleunigt. Berechnen Sie die kinetische Energie, die Gesamtenergie, die Masse, die Geschwindigkeit und den Impuls der Elektronen.

Lösungen:

1) Die Relativitätstheorien beruhen auf der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich groß ist, unabhängig davon, ob sie sich bewegen oder ob sie ruhen. In der speziellen Relativitätstheorie, die sich auf Körper bezieht, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, treten folgende Effekte auf:
   a) Im bewegten System gehen die Uhren langsamer. Die Zeit wird gedehnt. Man spricht von Zeitdilatation.
   b) Körper erscheinen von einem bewegten Bezugssystem aus betrachtet in Bewegungsrichtung verkürzt. Man nennt diese Erscheinung Längenkontraktion.
   c) Masse und Energie sind proportional zueinander mit dem Proportionalitätsfaktor c^2 nach Einsteins berühmter Formel

   $$E = mc^2.$$

   Daher kann man Masse in Energie (Zerstrahlung) und Energie in Masse (Paarbildung) umwandeln.
   d) Die Masse nimmt mit der Geschwindigkeit zu.
   e) Geschwindigkeiten können nicht rein arithmetisch addiert werden. Die Summe zweier Geschwindigkeiten kann maximal die Lichtgeschwindigkeit c ergeben.
   In der allgemeinen Relativitätstheorie werden auch beschleunigte Bewegungen und Bewegungen im Gravitationsfeld berücksichtigt. Es treten zusätzliche Effekte auf:
   a) Die Raum-Zeit wird durch die Gravitation eines Körpers gekrümmt.
   b) Die Photonen werden im Gravitationsfeld abgebremst bzw. abgelenkt.
   c) Das Newtonsche Gravitationsgesetz ist nicht mehr uneingeschränkt gültig. Es muss erweitert werden.
2) Zwei Versuche haben die Relativitätstheorie begründet, zum einen das Mitführungsexperiment von Fizeau und zum zweiten das Michelson-Morley-Experiment. Fizeau verglich die Lichtgeschwindigkeit in ruhendem Wasser mit der in schnell fließendem Wasser. Dabei stellte er fest, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig davon war, ob das Wasser ruhte oder sich bewegte. Das Licht wurde vom Wasser nicht mitgeführt, anders als ein Boot, das auf dem Wasser schwimmt. Michelson und Morley bestimmten mit einem Interferometer (s. Abb.1) die Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Erdrotation und senkrecht dazu. Dazu zerlegten sie durch einen halbdurchlässigen Spiegel einen Lichtstrahl, bei modernen Aufbauten einen Laserstrahl, in zwei Teilstrahlen, die sich senkrecht zueinander auf je einen Spiegel zu bewegten. Nach der Reflexion wurden beide durch den halbdurchlässigen Spiegel zum Teil zu einem Schirm abgelenkt, wo sie miteinander interferierten und ein Interferenzmuster ergaben je

nach Gangunterschied zwischen den beiden Spiegeln. Drehten Michelson und Morley die Apparatur, so änderte sich das Muster nicht. Daraus folgerten sie, dass sich das Licht in Richtung der Erdrotation und senkrecht dazu mit gleicher Geschwindigkeit ausbreitet. Das Licht wird also von der Erdbewegung nicht mitgeführt, anders als ein Flugzeug, dass die Erdgeschwindigkeit beim Start mitnimmt bezogen auf das Weltall. Sie stellten keinen Unterschied fest.

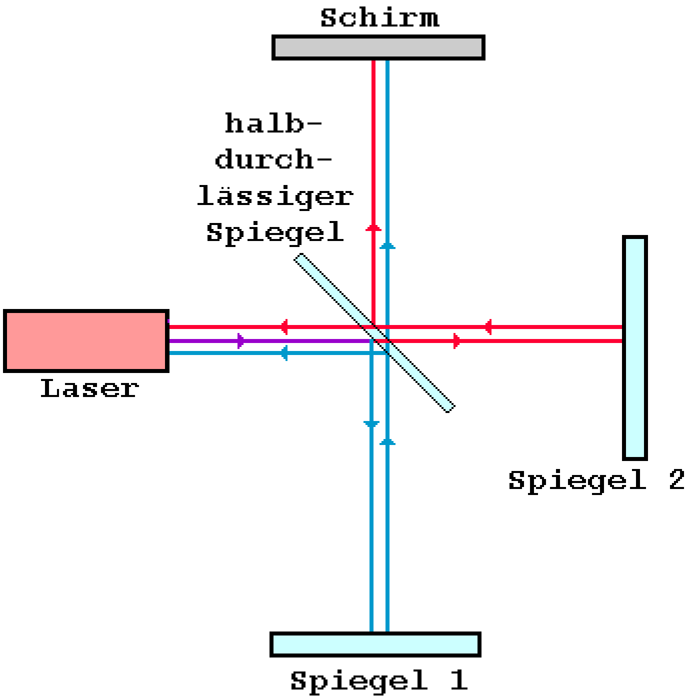

Abb.1: Michelson Interferometer

3) Mit Hilfe der Lorentztransformationen kann man Orts- und Zeitangaben von einem ruhenden Bezugssystem S in ein Bezugssystem S' umrechnen, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Legt man die x-Richtung in Richtung der Bewegung, so gelten folgende Umrechnungen, auch Lorentztransformationen genannt:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit besagt, dass der

Lichtkegel, der von einer punktförmigen Lichtquelle ausgeht, unabhängig vom Bewegungszustand des Bezugssystems stets einer Kugelschale entspricht. Mathematisch muss daher gelten:

$$x'^2+y'^2+z'^2-(c*t')^2 = x^2+y^2+z^2-(c*t)^2.$$

Ersetzt man in obiger Gleichung die Angaben im bewegten System S' mit Hilfe der Lorentztransformationen, so erhält man mit

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\begin{aligned}
&x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=\\
&k^2(x-vt)^2+y^2+z^2-c^2k^2(t-vx/c^2)^2=\\
&k^2x^2-2kxvt+k^2v^2t^2+y^2+z^2-c^2k^2t^2+2kvxt-k^2v^2x^2/c^2=\\
&x^2k^2(1-v^2/c^2)+y^2+z^2-t^2k^2(c^2-v^2)=\\
&x^2+y^2+z^2-t^2(c^2-v^2)/(c^2-v^2)=\\
&x^2+y^2+z^2-c^2t^2,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

4) Es gelten folgende Gesetze:

a) Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
v_{13}&=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\\
&=\frac{x_2'+v_{12}t_2'-(x_1'+v_{12}t_1')}{t_2'+v_{12}x_2'/c^2-(t_1'+v_{12}x_1'/c^2)}\\
&=\frac{v_{12}(t_2'-t_1')+x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'+v_{12}/c^2(x_2'-x_1')}\\
&=\frac{v_{12}+(x_2'-x_1')/(t_2'-t_1')}{1+v_{12}/c^2*(x_2'-x_1')/(t_2'-t_1')}\\
&=\frac{v_{12}+v_{23}}{1+v_{12}v_{23}/c^2}.
\end{aligned}$$

Darin bedeuten:

v_{13}: Geschwindigkeit des Körpers im System S
v_{23}: Geschwindigkeit des Körpers im System S'
v_{12}: Geschwindigkeit des Systems S' im System S.

b) Massenzunahme:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Darin bedeuten:

m: bewegte Masse
m_0: Ruhemasse
v: Geschwindigkeit der Masse

c) Längenkontraktion

$$l = l_0 * \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Darin bedeuten:

l_0: Länge des Körpers im Ruhesystem
l: Länge des Körpers im bewegten System
v: Geschwindigkeit des Körpers.

d) Zeitdilatation:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Darin bedeuten:

t_0: Zeit im Ruhesystem
t: Zeit im bewegten System
v: Geschwindigkeit des bewegten Systems.

e) Äquivalenz Masse/Energie

$$E = mc^2.$$

Darin bedeuten:

E: Energie

m: Masse

f) Relativistische kinetische Energie

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2.$$

Darin bedeuten:

E_{kin}: kinetische Energie
m: bewegte Masse
m_0: Ruhemasse

In allen Formeln ist c die Lichtgeschwindigkeit.

5) Benutzt man die Bezeichnungen aus Aufgabe 4, so ist:

$$v_{12} = v_1$$
$$v_{23} = v_2.$$

Damit erhält man in den einzelnen Teilaufgaben folgende Gesamtgeschwindigkeiten v_{13}

a)

$$v_{13} = \frac{2c/3 + c}{1 + (2c/3) * c/c^2}$$
$$= c.$$

b)

$$v_{13} = \frac{c + c}{1 + c * c/c^2}$$
$$= c.$$

c)

$$v_{13} = \frac{3c/4 + 3c/4}{1 + (3c/4)^2/c^2}$$
$$= 0{,}96c.$$

6) a) Wenn sich die Masse verdoppelt, so gilt nach dem Gesetz für die Massenzunahme:

$$m = 2m_0$$

und damit

$$2 * m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v &= c * \sqrt{1 - 1/4} \\ &= 0{,}866c \\ &= 2{,}6 * 10^8 m/s. \end{aligned}$$

b) Das Elektron erhält seine relativistische kinetische Energie durch die Beschleunigungsspannung U. Daher gilt:

$$mc^2 - m_0{}^2 = e * U$$

und damit

$$\begin{aligned} U &= (mc^2 - m_0 c^2) / e \\ &= (2m_0 c^2 - m_0 c^2) / e \\ &= m_0 c^2 / e \\ &= 511{,}9 keV. \end{aligned}$$

c) Nach klassischer Rechnung gilt für die Geschwindigkeit:

$$1/2 m_0 v^2 = e * U$$

und damit

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 * e * U / m_0} \\ &= 4{,}24 * 10^8 m/s. \end{aligned}$$

Nach der Relativitätstheorie ist das nicht möglich.

7) Für die Länge im anderen System gilt:

$$l = l_0 * \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$
$$= 10m * \sqrt{(1 - (2/3c)^2 / c^2}$$
$$= 10m * \sqrt{(1 - (2/3)^2}$$
$$= 7{,}45m$$

und damit

$$\Delta l = l_0 - l$$
$$= 10m - 7{,}45m$$
$$= 2{,}55m.$$

Für die Zeit im anderen System gilt:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$
$$= \frac{10s}{\sqrt{1 - (2/3c)^2 / c^2}}$$
$$= \frac{10s}{\sqrt{1 - (2/3)^2}}$$
$$= 13{,}42s$$

und damit

$$\Delta t = t - t_0$$
$$= 13{,}42s - 10s$$
$$= 3{,}42s.$$

8) Da die Satelliten jahrelang um die Erde kreisen, würden ihre Borduhren immer mehr von den Uhren am Boden abweichen, da die Zeitdilatation aufgrund der Geschwindigkeit mit der Flugzeit zunimmt, ebenso die Zeitkontraktion, verursacht durch die Gravitation der Erde. Daher müssen die Uhren mit Funksignalen in regelmäßigen Abständen neu synchronisiert werden. Denn Abweichungen der Uhren im Nanosekundenbereich verursachen durch die Lichtgeschwindigkeit der Funksignale

bereits Abweichungen im Meterbereich bei der Positionsbestimmung.

9) Für die Zeitdilatation aufgrund der Fluggeschwindigkeit gilt:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{2} t_0 * \frac{v^2}{c^2} \\ &= \frac{1}{2} * 4{,}32 * 10^4 s * \frac{(2{,}5*10^2 m/s)^2}{(3*10^8 m/s)^2} \\ &= 15 ns.\end{aligned}$$

Für die Zeitkontraktion durch die verminderte Gravitation erhält man:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{g * \Delta h * t_0}{c^2} \\ &= \frac{9{,}81 m/s^2 * 10000 m * 12 * 3600 s}{(3*10^8 m/s)^2} \\ &= 47{,}1 ns.\end{aligned}$$

Damit ist der Mensch beim Flug um

$$\begin{aligned}\Delta t &= 47{,}1 ns - 15 ns \\ &= 32{,}1 ns\end{aligned}$$

schneller gealtert als ein Mensch auf der Erde.

10) Für die kinetische Energie der Elektronen gilt:

$$\begin{aligned}E_{kin} &= e * U \\ &= 1{,}602 * 10^{-19} C * 1 * 10^8 V \\ &= 1{,}602 * 10^{-11} J.\end{aligned}$$

Damit erhält man für ihre Gesamtenergie:

$$E = E_{kin} + m_0 * c^2$$

$$= 1{,}602 * 10^{-11} J + 9{,}1 * 10^{-31} kg * (3 * 10^8 m/s)^2$$

$$= 1{,}6102 * 10^{-11} J.$$

Daraus errechnet sich die Masse m zu:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

$$= \frac{1{,}6102 * 10^{-11} J}{(3 * 10^8)^2}$$

$$= 1{,}789 * 10^{-28} kg.$$

Die Geschwindigkeit kann man mit Hilfe der Lösung zu Aufgabe 6 wie folgt berechnen:

$$v = c * \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2}$$

$$= 0{,}999987 * c.$$

Den Impuls kann man auf zweierlei Art ermitteln, entweder in dem man seine Definitionsgleichung anwendet oder in dem man die Formel aus Kapitel 9 benutzt. Mit der ersten Methode erhält man:

$$p = m * v$$

$$= 1{,}789 * 10^{-28} kg * 0{,}999987 * 3 * 10^8 m/s$$

$$= 5{,}367 * 10^{-20} Hy.$$

Der zweite Rechenweg liefert das gleiche Ergebnis.

13. Kritische Anmerkungen

Bei näherer Betrachtung treten im Gedankengebäude der Relativitätstheorie einige Widersprüche auf. Zum einen hängen Raum und Zeit vom System ab. Andererseits soll kein Inertialsystem gegenüber einem anderen bevorzugt sein. Wie kann es dann sein, dass man bei der Ableitung der Längenkontraktion und Zeitdilatation mit Hilfe der Lorentztransformationen zu genau entgegengesetzten Aussagen kommen kann, wenn man die Länge eines Stabes nicht vom ruhenden ins bewegte System bzw. die Zeit nicht vom bewegten ins ruhende System transformiert, sondern umgekehrt. Dann ergibt sich eine größere Länge des Stabes und eine kürzere Zeit auf der Uhr im bewegten System. Statt Längenkontraktion würde man Längendilatation beobachten und statt Zeitdilatation Zeitkontraktion. Um diesem Widerspruch zu entgehen, definieren die meisten Autoren in Abhandlungen zur Relativitätstheorie bei Zeitmessungen das bewegte System als Eigensystem der Uhren, bei Längenmessungen das ruhende System. Also gibt es doch ausgezeichnete Inertialsysteme, wobei sich die Frage stellt ruhend und bewegt in Bezug auf wen oder was. Die Widersprüche lassen sich durch die folgenden Überlegungen beheben. Die Versuchsergebnisse, die immer wieder für die Gültigkeit der Relativitätstheorie angeführt werden, können auch anders gedeutet werden.

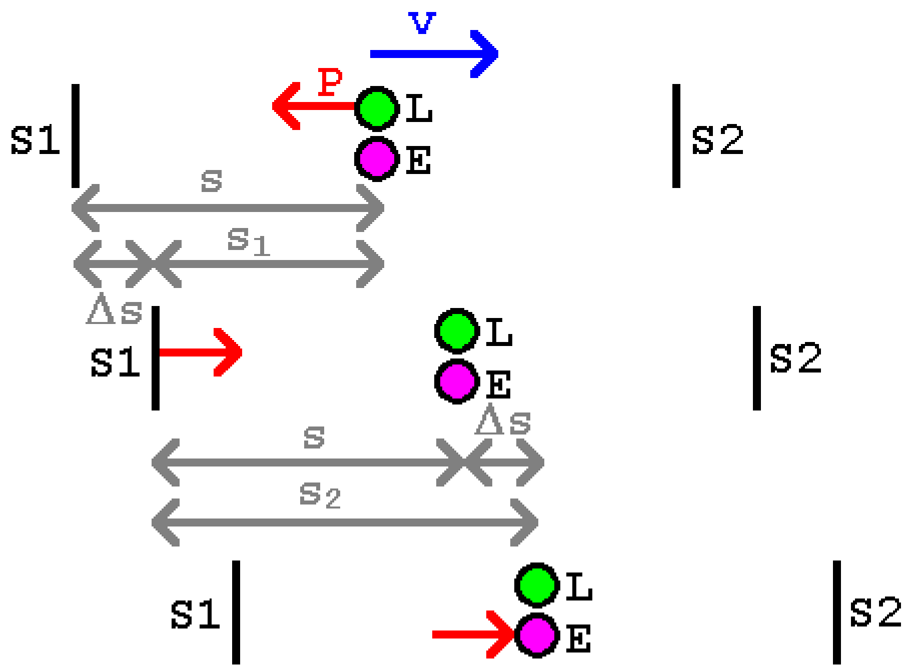

Abb.1: Michelson/Morley Experiment

Aus den Überlegungen zum Thema Quantenphysik auf dieser Webseite ergab sich die kühne Forderung, dass in einem Photonenschwarm die einzelnen Photonen statistisch verteilte Geschwindigkeiten besitzen müssen ähnlich wie in einem Elektronenhaufen. Wendet man diese Überlegung auf das Michelson-Morley-Experiment an, so erhält man in beiden Bezugssystemen die gleiche Zeit, die der Lichtstrahl für den Hinweg von der Lichtquelle zum Spiegel bzw. für den Rückweg vom Spiegel zum Empfänger benötigt, völlig unabhängig davon, ob die Apparatur sich bewegt oder ruht. Betrachten wir dazu Abb.1. Die Lichtquelle L und die Spiegel S1 und S2 bewegen sich relativ zum Fixsternhimmel mit der Geschwindigkeit v nach rechts. Der Lichtsender L sendet zum Zeitpunkt t = 0 ein Photon P nach links aus. Dieses wird am Spiegel S1 reflektiert und gelangt zum Empfänger E. Unabhängig vom Bezugssystem ist die Laufzeit für den Hin- und Rückweg gleich und zwar gleich der Laufzeit bei ruhender Apparatur, aber nicht, wie von Einstein postuliert, weil das Licht sich unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle mit c ausbreitet, sondern gerade weil die Geschwindigkeit des Lichtes von der Geschwindigkeit der Lichtquelle abhängt. Dadurch besitzt das Licht auf dem Weg zum Spiegel S1 im Mittel die Geschwindigkeit c - v und auf dem Rückweg die Geschwindigkeit c + v. Auf dem Hinweg bewegt sich die Lichtquelle entgegen der Flugrichtung des Lichtes, auf dem Rückweg in Richtung des Lichtes. Dafür ist der Hinweg kürzer als der Rückweg, da sich beim Hinweg der Spiegel S1 auf das Licht zubewegt und nach der Reflexion der Empfänger E vom Licht weg. Damit erhält man für die Zeit t_1 des Hinweges

$$t_1 = \frac{s_1}{c - v}$$

$$t_1 = \frac{s - \Delta s}{c - v}$$

$$t_1 = \frac{c * t - v * t_1}{c - v}$$

und für die Zeit t_2 des Rückweges

$$t_2 = \frac{s_2}{c + v}$$

$$t_2 = \frac{s + \Delta s}{c + v}$$

$$t_2 = \frac{c * t + v * t_2}{c + v}.$$

In beiden Gleichungen ist t die Zeit, die der Lichtstrahl bei ruhender Apparatur für den Hin- bzw. Rückweg benötigt.

Löst man beide Formeln nach t_1 bzw. t_2 auf, so erhält man im ersten Fall

$$t_1 * (c - v) = c * t - v * t_1$$
$$c * t_1 - v * t_1 = c * t - v * t_1$$
$$t_1 = t$$

und im zweiten Fall analog

$$t_2 * (c + v) = c * t + v * t_2$$
$$c * t_2 + v * t_2 = c * t + v * t_2$$
$$t_2 = t.$$

Die Flugzeit des Lichtstrahles ist stets gleich, völlig unabhängig davon, ob die Apparatur sich bewegt oder ruht. Michelson und Morley konnten folglich keine Interferenzerscheinungen beobachten. Dieses Ergebnis ist kein Postulat wie bei Einstein, sondern folgt aus der Annahme, dass die Geschwindigkeit des Lichtes wie beim Schall von der Geschwindigkeit der Quelle abhängt. Allerdings gibt es einen gewaltigen Unterschied zwischen beiden Wellenausbreitungen. Schall benötigt Luft als Medium. Sie ist damit das Bezugssystem der Geschwindigkeit. Licht braucht kein Medium, um sich auszubreiten. Einen Äther gibt es nicht. Das Bezugssystem fürs Licht ist der Fixsternhimmel, ein absolutes, als ruhend anzusehendes Bezugssystem. Wendet man diese Überlegungen auf die Myonen in der Atmosphäre an, so lassen sich die Beobachtungen wie folgt erklären. Die Myonen brauchen keine Zeitdilatation und Längenkontraktion, um zur Erde zu gelangen. Die vier Prozent von ihnen, die die Erdoberfläche erreichen, sind der statistische Ausläufer der Gaußschen Geschwindigkeitsverteilung der Myonen, die mit Überlichtgeschwindigkeit unterwegs sind und so in ihrer eigenen Halbwertszeit bis zur Erdoberfläche fliegen können. Sollte sich diese Annahme bestätigen, so hätte sie, wie im Skript zur Quantenmechanik auf dieser Webseite bereits dargelegt, weitreichende Konsequenzen für das Kausalitätsprinzip. Nicht immer ließen sich die wirklichen kausalen Zusammenhänge zweier Ereignisse erkennen, solange man sie nur mit Lichtgeschwindigkeit beobachten kann. Aber wie immer ist das Experiment die letzte Instanz in der Physik, die darüber entscheidet, ob die theoretischen Überlegungen wahr oder falsch sind.

14. Literatur

1) Prof. Dr. Dr. Horst Melcher: Sinn und Bedeutung der Speziellen Relativitätstheorie, erschienen in Praxis der Naturwissenschaften Physik in der Schule, Heft 4/45, Köln Juni 2005

2) H. A. Lorentz: Der Interferenzversuch Michelsons, erschienen in „Das Relativitätsprinzip", Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1974

3) J. Grehn, J. Krause (Hrsg.), Metzler Physik, Schroedel-Verlag, Hannover 1998

4) Dorn-Bader, Physik Gymnasium SEKII, Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig 2010